(1º θέμα τέτοιου είδους)

Άσκηση 3.5.1: 10/11/17

Τυχαία μεταβλητή x με συνάρτηση πιθανότητας

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{a}{5}, & x = 0, \pm 1, \pm 2 \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

α) $a = ;$, β) $F_x(x) = ;$ γ) $P(\frac{1}{2} < x \leq 2)$, $P(-1 < x < 1)$

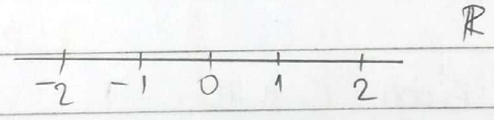
κ.ο.κ. $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)dx = 1 \right\}$

Λύση: α) Αφού P_x, σ.π. $\sum_x P_x(x) = 1$

$$\Rightarrow \sum_{x=0,\pm1,\pm2} \frac{a}{5} = 1 \Rightarrow a \sum_{x=0,\pm1,\pm2} \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow a\,\frac{1}{5}\,5 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

β) $F_x(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(x \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$



Αν $x < -2$, $F_x(x) = P(x \leq x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $-2 \leq x < -1$, $F_x(x) = P(x \leq x) = P(x = -2) = P_x(-2) = \frac{1}{5}$

$-1 \leq x < 0$, $F_x(x) = \ldots = P_x(-2) + P_x(-1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$0 \leq x < 1$, $F_x(x) = \ldots = P_x(-2) + P_x(-1) + P_x(0) = \frac{3}{5}$

$1 \leq x < 2$ $F_x(x) = \ldots = P_x(-2) + P_x(-1) + P_x(0) + P_x(1) = \frac{4}{5}$

$2 \leq x$ $F_x(x) = \ldots = P_x(-2) + \ldots\ldots + P_x(2) = \frac{5}{5} = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<-2 \\ 1/5, & -2\le x<-1 \\ 2/5, & -1\le x<0 \\ 3/5, & 0\le x<1 \\ 4/5, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

α.σ.κ. $F_X(2)-F_X(1/2)$

σ.π.π. $\int_{1/2}^{2} f_X(x)dx$

γ) $P(\frac{1}{2}\le x<2)$ α.σ.κ. $F_X(2)-F_X(1/2) = \ldots\ldots = \frac{1}{5}$

σ.π. $\sum_{1/2\le x\le 2} \ldots\ldots$

Άσκηση: Τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0\le x\le a \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$, $a>0$

α) $a=;$ β) $F_X=;$

γ) $P(0<x<\frac{1}{2})$, $P(x\le \frac{1}{4})$

α) Αφού f_X είναι σ.π.π.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f_X(x)}\,dx + \int_0^a f_X(x)dx + \int_a^{+\infty}\cancel{f_X(x)}dx$$

$$= \int_0^a 2x\,dx = \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^a = a^2$$

$$\Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \overset{a>0}{\Rightarrow} a=1$$

β) $x\in\mathbb{R}$, $F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dt + \int_0^x 2t\,dt, & 0\le x\le 1 \\ \int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dt + \int_0^1 2t\,dt + \int_1^x \cancel{0}\,dt, & x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x, & 0\le x\le 1 \\ 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1, & x>1 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

γ) $P\left(0<x\le\frac{1}{2}\right)$ $\xrightarrow{α.σ.κ.}$ $F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2 = \frac{1}{4}$

$\xrightarrow{σ.π.π.}$ $\int_0^{1/2} f_X(x)\,dx = \int_0^{1/2} 2x\,dx = \frac{1}{4}$

Άσκηση 3.5.7: Αεροπλάνα A_i, $i=1,2,3$

$P\left(\substack{\text{εντοπισμός} \\ A_i}\right) = \frac{i}{6}$, $i=1,2,3$

~~Αυτά~~ Εντοπίζονται ανεξάρτητα. Κατανομή του αριθμού των αεροπλάνων που θα εντοπιστούν.

Λύση: Έστω X ο αριθμός των αεροπλάνων (στα τρία) που θα εντοπιστούν). Το X είναι τ.μ.

Τιμές της X: $x=0,1,2,3$

X διακριτή $\overset{\text{ορ.}}{=}$ $P(X=0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$

Αν $A_1, \dots A_k$ ανεξάρτητα, τότε οποιαδήποτε από τα $\bar{A}_1, \dots \bar{A}_k$ είναι ανεξάρτητα

$P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (1-P(A_1))(1-P(\bar{A}_2))(1-P(A_3)) = \frac{60}{216}$

$$P_X(1) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=1) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \text{ ή } \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 \text{ ή } \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3) =$$

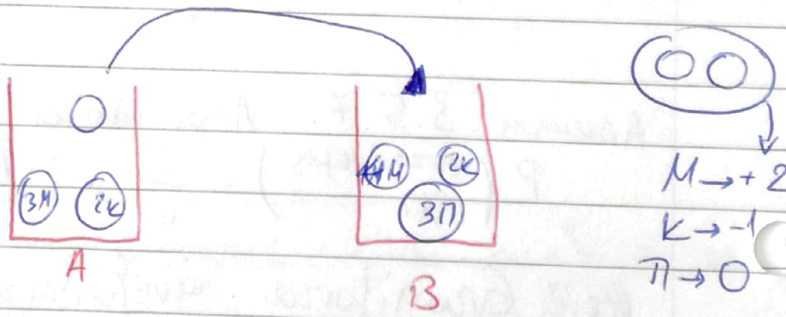
$$= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3) = \dots = \frac{102}{216}$$

$$P_X(2) = P(X=2) = P(A_1A_2\bar{A}_3 \text{ ή } A_1\bar{A}_2A_3 \text{ ή } \bar{A}_1A_2A_3) = \dots = \frac{48}{216}$$

$$P_X(3) = P(X=3) = P(A_1A_2A_3) = \frac{6}{216}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{60}{216}, & x=0 \\ \frac{102}{216}, & x=1 \\ \frac{42}{216}, & x=2 \\ \frac{6}{216}, & x=3 \end{cases}$$

Άσκηση 3.5.8:



Να προσδιοριστεί η κατανομή του κέρδους.

Λύση: Έστω X κατανομή του κέρδους

Το X είναι τ.μ.

Τιμές της x_i, x

K_B = {κόκκινη, από B κάλπη}

M_B = {μαύρη, από B κάλπη}

Π_B = {πράσινη, από B κάλπη}

$$x = -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 4$$

$$K_B K_B \quad K_B \Pi_B \quad \Pi_B \Pi_B \quad M_B K_B \quad M_B \Pi_B \quad M_B M_B$$

$P_X(-2) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=-2) = P(K_B K_B) \overset{\text{θ.ο.π.}}{=} P(K_B K_B / K_A) P(K_A) +$

$P(K_B K_B / M_A) P(M_A) =$

$$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{3}{75}$$

Ανάλογα

σ.π. $P_X(x) = \begin{cases} 3/75, & x=-2 \\ 12/75, & x=-1 \\ 5/75, & x=0 \\ 12/75, & x=1 \\ 23/75, & x=2 \\ 14/75, & x=4 \end{cases}$

Ειδικές Διακριτές τ.μ. κ' Κατανομές:

(I) Διωνυμική τ.μ. και κατανομή

Υπάρχουν πολλά προβλήματα που μπορούν να θεωρηθούν ως τυχαία πειράματα με δύο δυνατά αποτελέσματα $\begin{smallmatrix} \nearrow E \\ \searrow A \end{smallmatrix}$

Δοκιμή Bernoulli: Κάθε τ.π. με δύο δυνατά αποτελέσματα $\begin{smallmatrix} \nearrow E \\ \searrow A \end{smallmatrix}$

(Δ1) Θεωρώ τυχαία πειράματα που αποτελούνται από προκαθορισμένο αριθμό n-επαναλήψεων μιας στοιχειώδους διαδικασίας

(Δ2) Σε κάθε επανάληψη υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα $\begin{smallmatrix} E \\ A \end{smallmatrix}$

(S) n-δοκιμές Bernoulli

Έστω X το πλήθος των E στις n-επαναλήψεις. Το X είναι τ.μ. και ζητώ την κατανομή της

Τιμές X: $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$P_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=x) = P\left(\begin{array}{c} \text{στα } n\text{-το πλήθος} \\ E \text{ και } A \\ \text{τα } x \text{ θα είναι } E \\ \text{και τα } n-x \ A \end{array}\right)$$

$$= P(EA \text{ ή } A \text{ ή } \underbrace{EAEE\ldots E}_{x E \text{ και } n-x A} \text{ ή } \ldots)$$

$$= P(EA\ldots A) + P(EAEE\ldots E) + \ldots = P(EA\ldots A)\binom{n}{x \ \ n-x}$$

$\binom{n}{x}$ αλγεβρικά

$$P_X(x) = \binom{n}{x} P(\underbrace{EA\ldots A}_{\substack{x E \text{ και} \\ n-x A}})$$

Υποθέτω (Δ3) Οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη

$$\Rightarrow P_X(x) \overset{(\Delta_3)}{=} \binom{n}{x} \left(\underbrace{P(E)P(A)\ldots\ldots P(A)}_{x \ P(E) \text{ κ } n-x \ P(A)}\right)$$

(Δ4) Η P(E) παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη και είναι ίση με p

(Δηλ. $p = P(E)$ οπότε $q = 1-p = P(A)$, $0<p<1$)

$$\overset{(\Delta_4)}{\Rightarrow} P_X(x) = \binom{n}{x}[P(E)]^x[P(A)]^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Διωνυμικό τ.π. λέγεται κάθε τ.π. που πληροί τα $Δ_1$-$Δ_4$

Μια τ.μ. Χ που αριθ. απαριθμεί το πλήθος των Ε σε ένα διωνυμικό τ.π. λέγεται διωνυμική τ.μ.

Είναι η $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots n$ σ.π.;

ΝΑΙ, γιατί (i) $P_X(x) \geq 0$

(ii) $\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \xlongequal[\text{Νεύτωνα}]{\text{Διώνυμο}} (p+1-p)^n$

$= 1^n = 1$

Ορισμός: Η τ.μ. Χ λέγεται διωνυμική με παραμέτρους n και p ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$) αν οι δυνατές τιμές της Χ είναι $x = 0, 1, \ldots n$ και η σ.π. της Χ

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad q = 1-p, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

Συμβολισμός: $X \sim B(n, e)$

ακολουθεί

ή

περιγράφεται